Un moment
de l'expérience probabiliste

Théorie des processus stochastiques
et pratique dans les marchés financiers[i]

Nicole El Karoui[ii]

Discussion : Michel Armatte[iii]

Prisme N° 17

Novembre 2009

[i] Ce texte est tiré du séminaire de Nicole El Karoui au Centre Cournot « L'autonomisation des probabilités comme science » dont Michel Armatte était le discutant et dont Delphine Chapuis a assuré la retranscription.
Le film du séminaire peut être vu en ligne à partir du site www.centrecournot.org.
[ii] Nicole El Karoui est professeur de mathématiques appliqués à l'Université Pierre et Marie Curie (Laboratoire de probabilité et modèles aléatoires) et à l'École polytechnique (Centre de mathématiques appliquées).
[iii] Michel Armatte est chercheur au Centre Alexandre-Koyré et maître de conférences à l'Université Paris-IX.

Sommaire

1. Les processus aléatoires dans les années 1970-80 3
    a. Le contexte du développement des probabilités en France à la fin des années 60 3
    b. Qu'est-ce que n'est pas un probabiliste, au moins dans l'Ecole française ? 5
    c. Un retour sur le mouvement brownien 7
2. L'autonomie des processus en temps continu 8
    a. Les enjeux du formalisme 9
    b. Le calcul différentiel stochastique 12
    c. La simulation 13
3. En quoi je suis devenue « appliquée » 15
    a. Le champ d'application des produits dérivés 15
    b. De nouveaux problèmes, de nouveaux concepts 16
4. Conclusion 20
5. Commentaires de Michel Armatte 21
6. Réponses de Nicole El Karoui 27

Les probabilistes sont souvent intéressés par l'histoire de leur discipline, plus rarement par les questions fondamentales qu'ils pourraient se poser autour des faits qu'ils modélisent. Un ouvrage comme *La société du probable* et notamment l'article de Glenn Shafer[1] éclairent une partie de mon expérience dans le domaine des probabilités depuis exactement quarante ans, c'est-à-dire la fin de mon DEA de probabilité en 1968. Ils m'invitent à présenter mon propre point de vue.

J'ai eu la chance de participer à un moment extraordinaire du développement des probabilités, et plus précisément de la théorie des processus stochastiques. Cela reste une période inoubliable pour moi. J'avais à cette époque-là le sentiment de voir la science, les probabilités, en train de se faire. Un peu par hasard, il faut bien le dire, j'ai basculé il y a une vingtaine d'années du côté des utilisateurs des probabilités, en m'intéressant à un secteur particulier de la finance. Dans ce texte, j'essaie d'évoquer ce qui m'a intéressée dans la démarche et dans cet aspect de la finance sur lequel je continue à travailler aujourd'hui. Mon exposé est d'abord celui d'une probabiliste pure et dure, puis celui d'une probabiliste appliquée.

1. Les processus aléatoires dans les années 1970-80

a. Le contexte du développement des probabilités en France à la fin des années 60

Qu'est-ce qui a encadré et accompagné ma recherche sur les processus stochastiques, qu'est-ce qu'un probabiliste ? C'est quelqu'un qui ne se pose pas (trop) de questions autour des probabilités, quelqu'un qui est « tombé dedans ». La plupart de mes collègues a en effet toujours adhéré immédiatement aux probabilités comme un mode d'expressions et de réponses aux questions relatives à l'incertain. Un probabiliste, c'est aussi un théoricien tombé dans le monde magique des probabilités, où la rigueur s'introduit dans le monde du hasard : c'est un sentiment que j'ai souvent partagé avec mes collègues.

Selon le résultat d'un sondage organisé entre nous, la majorité de ceux qui a fait de la recherche en probabilités n'a jamais eu de cours sur les probabilités finies, ni sur le dénombrement. Heureusement pour nous, parce qu'il est sûr que nous ne nous serions pas engagés dans les probabilités par la suite ! C'est plus l'aspect modélisation qui nous a motivés. Pour les probabilités en temps continu (je ne décris pas le spectre de tous les gens qui ont fait des probabilités, mais l'expérience que j'ai eue et qui correspondait à un grand moment en France, alors la première dans ce domaine), il y avait deux lieux privilégiés. Je dis bien « privilégiés » car la recherche en probabilité se développait dans d'autres sites, mais les lieux les plus importants étaient d'un côté le Laboratoire de probabilités de l'Université à Paris-VI et le Centre de mathématiques de l'Université Louis-Pasteur à Strasbourg. Récemment, la localisation de probabilistes s'est diversifiée à l'Ecole normale supérieure, à Grenoble, à Orsay, à Rennes, à Toulouse…

En 1968, au début de ma thèse, le laboratoire de probabilités était situé à l'institut Henri Poincaré. Cet institut a toute une histoire qui nous intéresse puisqu'il a été créé avec le concours de l'Etat par la Fondation Rockefeller et grâce à une donation de la famille Rothschild en 1928, pour promouvoir « le calcul des probabilités et de la physique mathématique, d'une part, et la physique théorique d'autre part ». Il y avait donc une mention spéciale pour la théorie des probabilités dans ce contexte-là. Depuis cette période, l'activité de recherche probabiliste s'est intensifiée et structurée via notamment la création d'une Unité de recherche du C.N.R.S. en 1960 et du Laboratoire de probabilités en 1969. C'est probablement l'un des plus grands laboratoires du monde pour ce qui est de la concentration probabiliste, puisqu'il y a pratiquement quatre-vingt chercheurs et enseignants-chercheurs permanents en ce moment dans la rue du Chevaleret.

De l'autre côté, le pôle autour duquel une grande partie de la recherche sur les processus stochastiques s'est développée était localisé à Strasbourg autour de Paul-André Meyer, directeur de recherches au CNRS. L'activité y était très intense et elle a perduré. Elle s'est notamment exprimée à travers la publication du « Séminaire de probabilités »[2] : le choix était de publier très vite les résultats nouveaux, qui ne pouvaient paraître que sous le contrôle de Paul-André Meyer : il révisait tous les articles et réécrivait ceux qui l'intéressaient. Cette politique de publication a eu un impact international très important et a largement contribué à faire connaître l'Ecole française, bien que pendant longtemps les articles étaient écrits en français. Le séminaire a commencé en 1967 et il continue aujourd'hui, mais depuis quelques années l'anglais est devenu dominant. Le séminaire vient d'ailleurs d'être numérisé d'une manière remarquable. Quand on cherche des articles du séminaire sur la Toile, on les retrouve parmi les premiers cités sur la liste des occurrences. Du coup, il y a un retour d'information très important autour de ces publications. Ce n'est pas fondamental, mais c'est assez rare dans le domaine de la publication scientifique. Dans le contexte actuel de la valorisation de la recherche, cela ne serait plus possible, car actuellement les articles du *Séminaire* sont comptabilisés comme des actes de Congrès, bien que la plupart soit constituée de premiers résultats…

En 1970, l'Ecole française est pionnière dans le domaine des probabilités des processus stochastiques, aux côtés de l'Ecole nord-américaine particulièrement active dans les années 1950, et dont les symposiums de Berkeley (1950, 1955, 1960) qui rassemblaient les meilleurs du domaine permettaient de faire périodiquement le point des avancées théoriques. Les Ecoles russe et japonaise étaient aussi très actives, mais les échanges sont pendant longtemps restés très difficiles avec les mathématiciens de l'Union soviétique. Ils ne se sont ouverts qu'à partir des années 1960 avec le Japon. Beaucoup des travaux étaient publiés dans des revues locales, dans leur langue d'origine (les probas en japonais, c'est dur !). Il fallait attendre leur traduction au moins deux ans après leur publication.

Je parle de « théoricien des probabilités » et non de mathématicien. En 1968-70, faire des probabilités ce n'était pas faire des mathématiques pour la communauté mathématique « pure », et il était interdit aux normaliens (mais pas aux normaliennes !) d'aller faire des probabilités. J'étais pour ma part assistante à Orsay, et quand j'ai soutenu ma thèse d'Etat en 1971, le jury m'a dit « Ah, mais ce n'est pas du dénombrement ? ». Les probabilités étaient encore dénoncées à la fin des années soixante-dix comme une sous-discipline, par J. A. Dieudonné par exemple. Dans les années 1980, l'explosion des applications des probabilités à l'analyse est perceptible, dans le calcul de Malliavin notamment. Les probabilités ont eu alors pignon sur rue en mathématique. En 2006, Wendelin Werner a reçu la première médaille Fields décernée à un probabiliste dans l'histoire de cette discipline. Les probabilités ont ainsi été consacrées comme une branche des mathématiques pures et appliquées, même si en France l'appliqué reste peu développée.

b. Qu'est-ce que n'est pas un probabiliste, au moins dans l'Ecole française ?

Par définition, un probabiliste ne s'occupe pas des applications, il ne s'occupe pas des données. Il fait de la théorie pure et dure. Il est aussi méprisant par rapport aux statisticiens que le sont les mathématiciens purs par rapport à lui. C'est surprenant car les probabilités, enfin surtout les probabilités en temps continu, ont toujours été, on va le voir, motivées par des phénomènes réels. Dans notre communauté, les phénomènes dignes d'intérêt sont issus de la physique. Aujourd'hui la biologie a acquis à son tour le statut de domaine noble, mais pas les sciences sociales, au sens très large du terme.

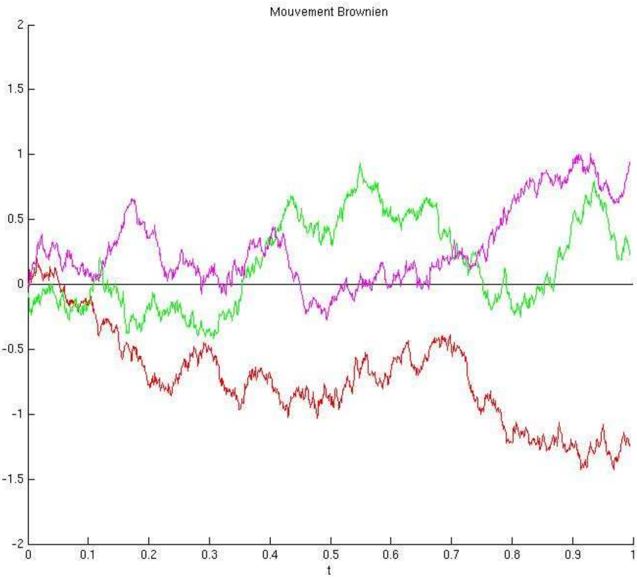
Ce ne sont pas les propriétés quantitatives des modèles qui intéressent le probabiliste, puisque de toute façon il ne les met pas à l'épreuve des données. Ce sont davantage les propriétés qualitatives, qui sont souvent déduites de résultats asymptotiques complexes. En ce sens, il est un mathématicien analyste standard. Un probabiliste ne se pose pas des questions appliquées mais des questions théoriques. Dans les années 1970-1980, les questions théoriques étaient d'une ampleur telle qu'elles pouvaient occuper pas mal de gens. Cela continue, mais sur un spectre maintenant incroyablement large. J'ai quitté le laboratoire de probabilités pour aller à l'Ecole polytechnique il y a une dizaine d'années, et je pense que je ne comprends plus rien aux deux tiers des thèmes de recherche du laboratoire aujourd'hui. L'explosion des probabilités était perceptible dans de nombreux champs d'application, que ce soit des domaines proches des mathématiques comme l'informatique, le traitement d'images, ou de proches compagnons comme la physique. Plus récemment, leur irruption en biologie contribue à interroger le vivant sous un angle tout à fait nouveau[3]. Le Séminaire « Les probabilismes » atteste clairement de cet état de fait et réactualise les questions de Cournot dans une interrogation multidisciplinaire.

Comment résumer mon expérience de recherche théorique autour des processus stochastiques dans les années 1970-1980 ? Un processus stochastique, surtout pour nous, est un processus indexé par le temps supposé réel. On dit continu par opposition au temps discret (fini ou dénombrable). Un exemple typique était le mouvement brownien mais de nombreux autres processus avaient été étudiés. Rappelons que la première description du mouvement brownien est l'œuvre du botaniste écossais Robert Brown à la fin des années 1820[4]. Très spectaculaire pour moi, notamment par rapport à mon activité future est la thèse de mathématiques de Louis Bachelier, intitulée *Théorie de la Spéculation*, et défendue à la Sorbonne en 1900 devant un jury présidé par Henri Poincaré. Contrairement à ce qui se dit parfois, Bachelier n'a pas introduit le mouvement brownien pour modéliser des cours, il ne parle pas d'historiques de données. Son propos est de définir une axiomatique abstraite des prix des contrats qui garantissent des opérations dans le futur, comme l'achat d'une action. Il montre qu'il est nécessaire de penser que l'action se comporte comme un mouvement brownien pour que des transactions aient lieu. C'est une démarche très proche de la démarche actuelle, puisqu'il ne teste son modèle qu'*a posteriori* sur les prix de contrats.

En prise directe avec l'observation, la description par Einstein en 1905 du mouvement des particules qui diffusent sous les chocs des atomes n'est plus une réponse de type « la particule va se trouver à tel endroit au temps t », mais seulement « la probabilité pour que la particule se trouve au temps t dans une petite boule autour de cette position vaut tant ». A ce phénomène physique bien réel, il donne une réponse probabiliste. Wiener, en 1913, introduit ensuite le mouvement brownien comme forme de brouillage dans les signaux de transmission[5]. En dehors de l'exception due à Bachelier, l'introduction des processus stochastiques vient essentiellement de la physique de la période d'avant-guerre. Les débuts de modélisation de ces processus sont nombreux. Les tournants décisifs sont réalisés par Andrei Kolmogorov en 1933, avec l'introduction de ce que l'on appelle l'espace de probabilité[6], puis par Paul Lévy[7]. Probabiliste particulièrement actif, P. Lévy a eu des intuitions extraordinaires sur le comportement dans le temps des phénomènes aléatoires. L'école française des processus stochastiques s'est vraiment construite dans la lignée de ses travaux. Dans les années 1960-1970, on avait tendance à dire qu'une grande partie des probabilistes passait son temps à redémontrer de manière rigoureuse des résultats qui avaient été énoncés par Paul Lévy. Il est vrai que dans les années 1930, la notion de preuve n'était pas la même ; elle était plus formalisée après-guerre.

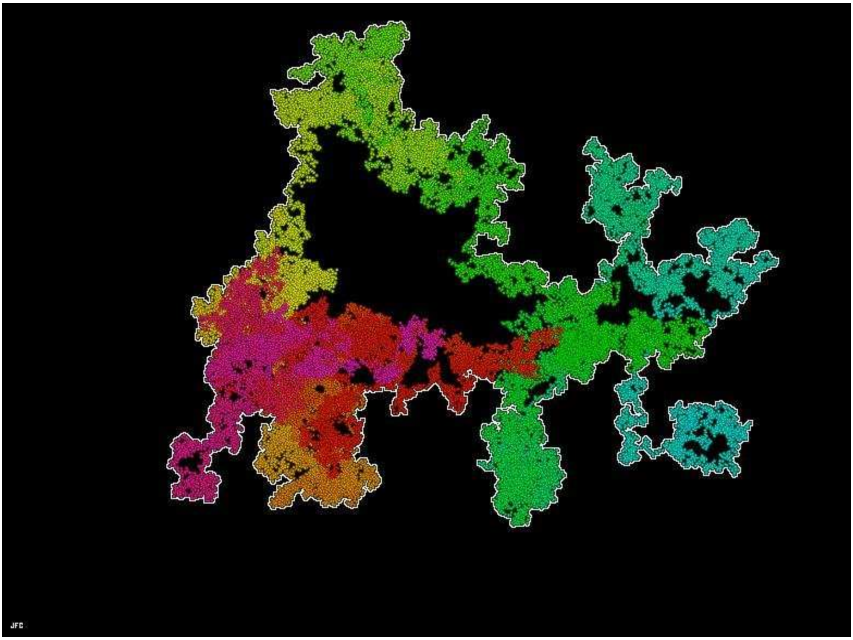
c. Un retour sur le mouvement brownien

Sur le schéma ci-dessous, j'ai tracé des trajectoires de ce que l'on appelle le « mouvement brownien ». Que signifie « une trajectoire » ? C'est l'évolution d'un phénomène au cours du temps, dont on regarde le mouvement. Les trois trajectoires représentent ici les possibilités d'évolution d'un mouvement brownien, c'est-à-dire que les caractéristiques de ce



que l'on simule sont exactement les mêmes. Cela montre que l'intuition du comportement « individuel » d'une trajectoire ne va pas de soi.

Quelles sont les caractéristiques de ce que l'on voit ? Il s'agit d'un mouvement tout à fait erratique, qui change rapidement. Les changements de pente sont très importants et surtout très fréquents. Il y a ensuite un lien entre les mouvements en temps et les mouvements en espace, c'est là une des caractéristiques de ce phénomène. Cela donne une certaine intuition des phénomènes que l'on cherche à modéliser. Jean-François Colonna, auquel j'emprunte cette image, est un spécialiste de la modélisation numérique au Centre de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique, il a beaucoup étudié la représentation



fractale et en présente ici une illustration particulière. Il s'agit du graphe d'un mouvement brownien en deux dimensions, quand il diffuse dans le plan : les différentes nuances représentent les évolutions au cours du temps de certains de ces phénomènes.

2. L'autonomie des processus en temps continu

L'exposé dont ce texte est tiré portait sur l'autonomisation progressive des probabilités des processus en temps continu. Pour les rendre autonomes, il fallait tout d'abord leur trouver un cadre conceptuel dans lequel on allait pouvoir réfléchir à ces objets. Il s'agissait de courbes (fonctions) et non plus de points, de variables ou de vecteurs. On pense l'objet comme une courbe. Une courbe est nettement plus complexe qu'une suite, pour des raisons sur lesquelles j'insiste un peu. La première étape était donc d'avoir des concepts et des outils qui permettent de réfléchir à ces objets.

A. Kolmogorov introduit le premier un formalisme acceptable pour aborder ces questions. Ce formalisme fait souffrir les étudiants à qui les probabilités sont enseignés pour la première fois. Ils se demandent en effet pourquoi ce célèbre espace de probabilité est introduit : Ω pour l'espace des épreuves, **A** pour la tribu des événements et P la probabilité qui mesure les événements, puisque pour la plupart de ces étudiants, on ne va pas changer d'ensemble **A** ; ils en déduisent logiquement que cela ne sert quasiment à rien. J'ai retrouvé à l'institut Henri Poincaré les comptes-rendus du séminaire de probabilités de l'après-guerre et de 1950 et 1953 (il a débuté dans les années 1930). Ce qui est amusant, c'est que ces comptes-rendus commençaient toujours par « Mr. Untel a justifié pourquoi il introduisait l'espace (Ω, **A**, P)… » alors que cette notion fait maintenant partie de la base du premier enseignement des probabilités. Ce pas dans la modélisation a été extrêmement important.

a. Les enjeux du formalisme

Progressivement, la notion de structure d'information est introduite lorsque les phénomènes se déroulent au cours du temps. Ils sont alors envisagés comme une courbe qui se construit au fur et à mesure, ce qui signifie qu'il y a une information utilisable (un apprentissage) sur l'évolution du phénomène au cours du temps. Par conséquent, si on sait ce qui s'est passé jusqu'à la date t, on peut mieux anticiper ce qui se passe après.

Lorsque le phénomène étudié est « markovien »[8], c'est-à-dire que la connaissance de la valeur d'un actif à un moment donné suffit à résumer pour le futur toute l'information passée, cet apport est important, mais pas décisif, car l'intuition suffit souvent à conclure (mais pas à démontrer). Dans les années 60, apparaît la nécessité de sortir de ce contexte parce que de nombreuses fonctions aléatoires, comme les martingales, ne satisfont pas ce genre de propriété. On a développé de nouveaux outils et un meilleur formalisme, de plus en plus abstrait et difficile à manier et à enseigner.

Un de nos outils stratégiques, qui devient en quelque sorte l'instrument de l'émancipation par rapport aux autres théories mathématiques est la notion de « martingale ». Avec cette notion, le probabiliste Joseph Leo Doob contribue à signer dans les années 50 la mort du principe de Cournot[9], comme l'explique très bien Glenn Shafer dans son article[10]. En effet, il n'est plus nécessaire de répéter une expérience aléatoire et d'utiliser les fréquences pour estimer les probabilités, ainsi que les fluctuations autour des nombres trouvés. Le même genre de résultats peut être obtenu avec des processus aléatoires, dont les seules propriétés exigées sont les suivantes : soit la connaissance de la structure d'information jusqu'à la date t, la meilleure estimation de ce qui va se passer à la date t+h (meilleure en un sens non précisé), c'est-à-dire la moyenne en quelque sorte, c'est la valeur observée ici. C'est la définition de ce que l'on appelle une martingale. Elle fait référence aux jeux de hasard mais mathématiquement, ce sont des processus que l'on retrouve dans un grand nombre de situations, avec des motivations fort variées.

Un certain nombre d'éléments réapparaît, en correspondance avec les résultats universels de la probabilité classique, centrés autour des deux grands théorèmes que tout probabiliste utilise avec leurs applications en tête. Ces théorèmes sont aussi perçus dans la motivation d'un traitement des données et sur lequel la discussion de Cournot est particulièrement intéressante et pertinente.

Le premier est celui que l'on appelle la loi des grands nombres : si l'on répète suffisamment une expérience aléatoire, en faisant la moyenne des résultats, on a une idée de l'incertain, de la quantité qu'on regarde et de sa valeur moyenne. Les fluctuations autour de la moyenne sont gérées par le principe universel, de la loi de Gauss et de certaines de ses extensions. Il y a des lois universelles et leur existence fait que même si on ne connaît pas la loi du phénomène étudié, on peut dire un certain nombre de choses sur son comportement grâce à ces résultats asymptotiques. Dans le cas des martingales, J. L. Doob montre qu'on peut encore passer à la limite, et que, lorsque la limite est une constante, on obtient toujours des résultats de fluctuations gaussiennes, qui permettent de contrôler la vitesse de convergence.

D'autres résultats universels existent, sur lesquels la réflexion a beaucoup progressé depuis des années ; ils concernent les comportements extrêmes, encore appelés événement rares, c'est-à-dire les événements de petite probabilité. Ces questions replacent le principe de Cournot au centre du débat puisque ce principe propose de les considérer comme non réalisables dans la pratique. J. L. Doob a montré que dans la théorie des martingales on avait toujours un contrôle des « événements rares », liés aux grands écarts, dans la mesure où on peut contrôler la probabilité que le maximum absolu dépasse un seuil donné ε par une quantité proportionnelle à la variance de la valeur terminale de la martingale contrôlée par $1/\varepsilon$. Dans les marchés financiers, depuis les travaux de Benoît Mandelbrot, dans les années 60 et de beaucoup d'autres ensuite, on s'intéresse de près à ces événements rares. La crise financière relance l'intérêt pour ces questions.

Le mouvement brownien apparaît dans tout un tas de situations, très différentes : la biologie, la physique, les marchés financiers, le traitement du signal… Un mouvement brownien est quelque chose qui se reproduit au cours du temps avec une certaine stationnarité, c'est l'hypothèse essentielle, et qui a de l'indépendance, c'est donc souvent une représentation du bruit qui peut apparaître au cours du temps. Comme ce mouvement est la somme de ces accroissements, on peut lui appliquer la loi des grands nombres et les théorèmes de fluctuation. Sans surprise, les distributions gaussiennes apparaissent une fois de plus. Cela caractérise le mouvement brownien. Enfin ce n'est pas tout à fait juste car les processus à accroissement indépendant, stationnaires, peuvent être autre chose qu'un mouvement brownien. Il y a une sorte de contrôle de la vitesse de convergence qui dit si on va plutôt vers un phénomène continu ou vers un phénomène à sauts.

Selon la propriété de stationnarité, ce bruit est centré et sa variance proportionnelle au temps. Par son caractère gaussien, on peut donc connaître la probabilité que le mouvement brownien se trouve dans un état y à la date t s'il est parti de zéro, grâce à la densité gaussienne de variance t, dont le graphe est la célèbre courbe en cloche. Cette densité gaussienne a la propriété remarquable de satisfaire une équation aux dérivées partielles du second ordre (ce que l'on peut vérifier à la main), connue sous le nom d'équation de la chaleur. La présence de termes mettant en jeu des dérivées secondes (du second ordre) n'est pas surprenante, car dans ces phénomènes très fluctuants, même sur de très petits intervalles de longueur dt, le moment d'ordre deux est en dt, alors que dans les phénomènes différentiels ordinaires, c'est le moment d'ordre 1 qui a cette propriété.

Dans les années 1970 et 1980, cela fait longtemps que l'on étudie les phénomènes en temps continu, browniens entre autres. Ils apparaissent modélisés d'abord par N. Wiener pour les télécommunications puis A. Kolmogorov dans les années 1930 ; P. Lévy a décrit énormément de choses sur les processus qui portent son nom, c'est l'analogue du brownien mais ça « saute ». Des choses très subtiles et assez compliquées ont donc été étudiées. Puis, à partir des années 1940, il y a toute une activité qui se met en place, notamment autour des écoles russe et japonaise.

Pour étudier ces phénomènes, on utilise beaucoup jusqu'aux années 60 le lien entre les processus de Markov et la théorie des semi-groupes notamment. Les développements de ces théories sont d'ailleurs anciens et la référence à des théories mathématiques mieux constituées permet d'avancer dans la compréhension des phénomènes, afin en particulier d'obtenir des résultats asymptotiques. Puisqu'on fait référence à une théorie déterministe, les quantités étudiées sont du type, valeur moyenne de certaines variables dépendant du processus étudié.

A partir des années 50, en s'appuyant sur la théorie des martingales, toute la réflexion probabiliste sur les processus essaye de promouvoir ce qu'on peut appeler les trajectoires et le travail sur ces trajectoires. Quel est l'intérêt de cette démarche ? Quel genre d'opérations peut-on faire sur les trajectoires ? De nombreuses trajectoires sont intuitives, d'autres le sont moins : arrêter ou faire renaître une trajectoire à un temps bien choisi, recoller des trajectoires, les décaler dans le temps… une plus grande liberté est acquise, qui est aussi infiniment plus fructueuse. On essaie donc de quitter le monde déterministe qui permet d'analyser et de faire des calculs : théorie du potentiel, semi-groupes, etc. pour essayer de se centrer sur les trajectoires. Ce n'est pas une trivialité, car il est beaucoup plus compliqué de penser l'aléa d'une courbe que de penser un phénomène discret qui se reproduit au cours du temps.

b. Le calcul différentiel stochastique

Le calcul intégral et le calcul différentiel (déterministe) ont marqué définitivement la modélisation des phénomènes déterministes. C'est donc naturellement que ces idées sont introduites dans le monde aléatoire, bien qu'à première vue les trajectoires ne paraissent pas assez régulières : elles changent de pente tout le temps et ne sont donc fondamentalement pas dérivables.

C'est pourtant ce qui se développe de manière très rapide à partir des années 1940, autour d'Itô Kiyoshi[11] d'une part, de J. L. Doob d'autre part. La notion d'intégration (stochastique) par rapport au mouvement brownien et plus généralement par rapport aux martingales émerge. Dans les années 50, un calcul dit « différentiel stochastique » conduit à un calcul différentiel exact, connu sous le nom de formule d'Itô. La formule d'Itô dit comment on peut analyser une fonction d'un mouvement brownien, de type martingale, uniquement en termes d'intégrales stochastiques et d'intégrales classiques. Elle ouvre la porte à un nombre infini de possibilités. Curieusement, elle constitue le fondement de toutes les stratégies financières d'application aux produits dérivés, qui émergent à partir de 1970. Il faut d'ailleurs insister sur le rôle charnière qu'a joué Itô dans la théorie des processus. Certes, ses contributions ont été décisives, mais son rôle social a été tout aussi important : l'école mathématique qu'il a créée à Kyoto a eu un rayonnement sans équivalent.

A la base du débat autour du principe de Cournot, se trouve la question centrale de la place respective accordée aux événements de petite probabilité *par rapport à* ceux de probabilité nulle. Dans la représentation additive des probabilités, où l'on additionne les probabilités d'événements disjoints en nombre fini et on passe à la limite (c'est la vision dénombrable), il y a toujours en arrière plan un phénomène de stabilité qui concerne les événements de probabilité nulle. Si vous prenez en effet une réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle, elle reste de probabilité nulle. Tous les grands théorèmes que l'on a vu apparaître n'existent qu'en raison de l'hypothèse admise que certains phénomènes n'ont lieu qu'à un ensemble de probabilité nulle près : là se définissent les notions de convergence, de « presque sûr », etc.

Quand vous passez du discret au continu, cela ne marche plus du tout. Vous n'avez qu'à regarder l'intervalle (0,1) : évaluer avec la mesure de Lebesgue, qui associe sa longueur à un intervalle, chaque point est de mesure nulle et quand vous rassemblez tous les points, cela fait quelque chose qui est de masse égale à 1. Il y a là un grave problème technique. L'une des contributions majeures de l'école de Strasbourg a été de préciser comment résoudre ces difficultés, en utilisant des mathématiques profondes qui sont les probabilités non linéaires, appelées capacités en théorie du potentiel. Cette question était un enjeu crucial. Elle a été au cœur de la théorie qui s'est développée dans les années 65-75, notamment autour de P.-A. Meyer et C. Dellacherie à Strasbourg[12]. Ce développement avait été bien sûr préparé par Doob et par de nombreux chercheurs dans le monde. C'est ce que l'on appelle la théorie générale des processus; on sait traiter les ensembles négligeables, on sait progresser sur l'analyse de la régularité des trajectoires et on a maintenant les outils pour résoudre les nombreux nouveaux problèmes théoriques qui surgissent.

En contrepartie on sait traiter des phénomènes de plus en plus compliqués et de plus en plus abstraits. La théorie générale des processus a atteint un niveau d'abstraction et de complexité tels qu'on ne peut pratiquement plus l'enseigner dans les cours de troisième cycle. Progressivement, la communauté des jeunes probabilistes ne connaît plus les fondements de cette théorie ; ce qui est amusant, c'est de voir que les problèmes de mathématiques financières scientifiques amènent à se poser des questions proches de celles qui avaient motivé la théorie générale des processus. On la redécouvre d'une certaine manière, trente ans après. Les acquis de la science ne sont jamais établis une fois pour toutes.

c. La simulation

Au-delà de ces aspects théoriques, il m'importe d'évoquer quelque chose de tout à fait fondamental pour les théoriciens et pour les praticiens. C'est ce que l'on appelle la simulation Monte Carlo. Cette simulation a été renouvelée dans ses capacités d'application, grâce à la puissance des moyens de calcul actuels. Que signifie simuler ? Le texte comporte plus haut une illustration d'une trajectoire de brownien. En 1970, je n'avais jamais vu une telle trajectoire. Dans le meilleur des cas, je pouvais jouer à pile ou face et analyser, mais ce n'était pas très dense. Maintenant, les trajectoires que je vous ai montrées, on les simule, ce qui veut dire que l'on tire des nombres aléatoires et on joue ensuite à un pile ou face très serré et très dense qui donne ce que j'ai montré.

Cette simulation numérique change complètement la vision d'un certain nombre de phénomènes probabilistes, à la fois pour la théorie et pour les applications. Pour les applications, c'est clair, mais du point de vue théorique tout autant, car le fait de pouvoir simuler les phénomènes étudiés qui sont d'une grande complexité modifie le paysage, c'est le cas de le dire. La question que se pose tout de suite un théoricien porte sur la valeur et les qualités à l'image de la simulation. Une grande partie de la théorie classique des probabilités se réapplique à ces objets simulés pour essayer d'en tester la qualité, mesurer l'erreur et les vitesses de convergence.

Ce genre de pratique est actuellement très utilisé dans la banque par exemple. Une grande partie des calculs de risque n'est pratiquement plus faite que par des méthodes de Monte Carlo, qui correspondent à des problèmes de grande dimension, maintenant dans la résolution des équations aux dérivées partielles. De manière plus surprenante, même les problèmes d'optimisation peuvent être abordés avec ces outils. Pour calculer la valeur moyenne d'une quantité associée à un processus stochastique, l'ordre de grandeur des simulations nécessaires varie de cent mille à un million, pour avoir un intervalle de confiance petit, c'est-à-dire que le chiffre qui sort soit crédible. Il y a vingt ans, on ne pouvait pas faire un million de simulations, en tout cas pas sur un ordinateur personnel. On est maintenant capable de les faire et de faire beaucoup plus, d'autant que ces méthodes de simulation (on tire au hasard et on répète beaucoup de fois le même genre de choses), se parallélisent fort bien. Des moyens de calcul puissants peuvent être alors utilisés en parallèle.

Il est non seulement possible de faire du calcul mais aussi de simuler des trajectoires comme je l'ai fait, et de voir, par exemple, une trajectoire de brownien qui va descendre pendant très longtemps, alors que vous croyez qu'elle devrait monter. Des phénomènes dans les simulations, assez contre-intuitifs, deviennent ainsi observables. Cette expérimentation numérique probabiliste permet de porter un regard différent sur les phénomènes qui engagent la manière de raisonner des théoriciens. Rassurez-vous, au laboratoire de probabilités, qui est quand même le cœur pur et dur de la probabilité théorique, cela ne pénètre que très lentement.

3. En quoi je suis devenue « appliquée »

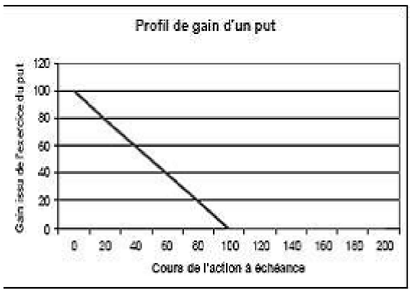
a. Le champ d'application des produits dérivés

L'objet de ce texte n'est pas en soi l'application de la théorie des processus stochastiques aux risques financiers, je souhaite expliquer pourquoi la théoricienne que je suis a été intéressée par cette expérience spécifique associée aux marchés financiers. C'est une expérience que je trouve assez innovante et qui concerne un secteur particulier et limité : le marché du risque financier et de ce que l'on appelle les produits dérivés. Ce risque est donc très spécifique. Il s'agit du risque interne au fonctionnement du marché et non celui du comportement des opérateurs, qu'ils procèdent à la titrisation, à la fabrication, à la circulation, à la vente de ses produits. Les questions auxquelles j'ai tenté de répondre concernent par exemple la formation des prix, les principes de couvertures. Les mathématiques financières n'existent pas en soi : il existe des mathématiques qui trouvent certaines applications dans la finance.

Que sont les « produits dérivés » ? De quoi sont-ils les dérivés ? Certains sont négociés dans les marchés des actions, des taux de change, des taux d'intérêt, etc. dont on peut lire les prix facilement. Ces prix peuvent présenter des tendances marquées et par ailleurs fluctuer énormément. Il ne s'agit pas de se préoccuper vraiment des raisons microéconomiques qui expliquent la formation de ces prix ; pour permettre aux agents économiques d'évoluer dans un monde aussi fluctuant, on propose des produits financiers, qui permettent de stabiliser des opérations que ces agents sont amenés à faire dans le futur, soit pour des raisons opérationnelles, soit pour des raisons de gestion. Les instruments sont soit des *contrats à terme*, ou leur version dans les marchés organisés appelés contrats *future*, qui sont des contrats du type « promesse de vente », soit des contrats qui garantissent un prix plafond, ou plancher suivant le sens de l'opération. C'est ce que l'on appelle des produits dérivés, le dernier type étant optionnel.

Ces contrats existent depuis très longtemps, mais dans les années 1970, aux Etats-Unis, des marchés organisés ont été créés pour promouvoir ces produits, en fiabilisant les transactions et en faisant circuler l'information sur les prix des contrats. Cela a induit une grande liquidité et un affichage des prix. Les marges des banques ont été réduites et des pertes importantes ont été enregistrées. Dans ce cadre de concurrence, les risques devaient être mieux gérés, sans quoi les activités pouvaient disparaître. Elles ont pourtant prospéré et l'activité dans ce genre de produits a atteint des nominaux extraordinaires, mêmes si les échanges effectifs sont 10 à 50 fois moins élevés en nominal. Les prix des produits dépendent du style de sous-jacent sur lequel ils sont écrits. Il y a toutefois des caractéristiques communes dans la gestion de ces contrats, qui découlent des principes que nous allons mettre en évidence.

Le point de vue auquel j'ai été confrontée est plutôt celui de la banque, vendeur de contrats optionnels, qui va prendre des risques spécifiques du contrat à la place de ses clients et qui doit donc gérer ces risques. Voilà ce qu'est une option ; il s'agit ici d'une option de vente : dans trois mois ou dans six mois vous pouvez vendre une action ou des dollars à un prix garanti dans le contrat, en ce moment cela peut être particulièrement intéressant puisque le marché anticipe la baisse du dollar et que vous bénéficiez d'un prix plancher pour la vente de votre produit. Le graphique correspond à l'analyse que faisait Bachelier : la motivation de Bachelier était d'étudier le comportement de ces prix dans le futur. La question est premièrement le prix et deuxièmement l'analyse des risques. C'est cette dernière opération que Bachelier n'a pas abordée. Dans les marchés organisés, pourtant, les prix sont faits par l'offre et la demande. La question fondamentale est celle de la gestion du risque.



b. De nouveaux problèmes, de nouveaux concepts

En 1973, les marchés commencent à s'organiser et les prix des contrats deviennent publics, cela a lieu en France en 1987 (alors que ces contrats étaient précédemment traités de gré à gré). La liquidité fait qu'on ne gagne plus suffisamment d'argent sur ces marchés à entendre les banques, perçues comme les supermarchés de la finance : on y trouve facilement des produits simples et standardisés.

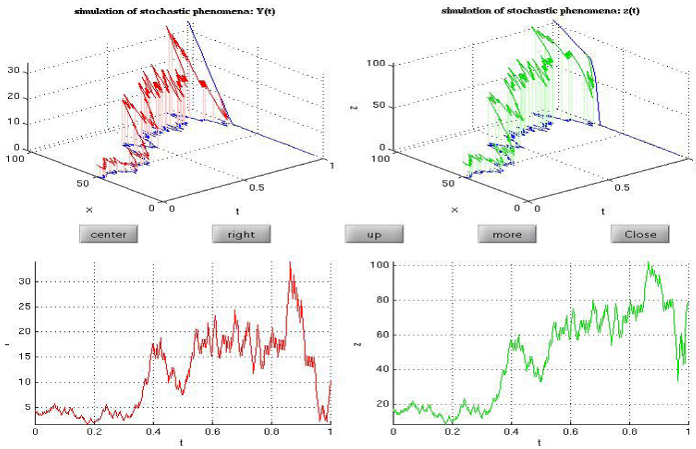
L'enjeu du vendeur est de réduire ses risques ; le vendeur est exactement dans la même position qu'un assureur qui garantit un risque dans le futur. Les choses se passent complètement différemment dans le cas de l'assurance. Les assureurs essaient de leur côté d'avoir un grand nombre de clients avec le même genre de risque, c'est ce qu'on appelle la différenciation par tête. En finance, l'évolution d'un cours est subie. Ses trajectoires ressemblent beaucoup aux trajectoires du mouvement brownien, avec des tendances parfois très marquées, en particulier à la baisse. Justement, on remarque que ce n'est pas le cas. Plutôt que d'estimer les pertes potentielles déduites d'une analyse statistique des cours et des comportements, une stratégie complètement différente est appliquée, on l'appelle la stratégie du portefeuille de couverture. Le risque que l'on assure est ainsi réputé d'un type très particulier, associé à un sous-jacent négocié dans le marché. Plutôt que d'estimer les pertes, on va essayer de les réduire par une stratégie dynamique au cours du temps.

Aux Etats-Unis, on était très sensible à la notion de portefeuille dans les années 1970, les grandes théories sur la gestion de portefeuille et la frontière efficiente venaient en effet d'être introduites par P. A. Markowitz. *A priori*, l'idée de portefeuille n'avait pas de raison particulière d'apparaître dans le monde des dérivés. C'est donc selon moi, une rupture très importante dans la manière d'aborder les problèmes de risque, que d'introduire la dimension *intertemporelle* par l'intermédiaire des portefeuilles. On ne peut différencier par tête, puisqu'on a un seul client.

Le temps est utilisé comme élément de couverture, une gestion dynamique est ainsi mise en place, qui s'adapte à l'évolution du marché au jour le jour, durant la durée du contrat. On n'est donc plus du tout en train d'utiliser une sorte de vision moyenne des pertes potentielles à l'horizon de gestion. On raisonne sur des petites périodes de temps, on modifie ses stratégies en fonction des comportements passés : c'est l'esprit différentiel, analogue à celui qui a été développé en calcul stochastique. On a une trajectoire, on ne la connaît pas, mais elle se révèle au cours du temps, on peut acheter ou vendre au cours du temps du sous-jacent. La valeur du portefeuille correspond à ce qu'on a appelé une intégrale stochastique dans le domaine des processus stochastiques. L'idée est alors d'essayer d'utiliser l'information que l'on récupère au cours du temps pour essayer de s'adapter au mieux au marché de ce qu'on a assuré afin de réduire les risques globaux de sa position.

Le problème est celui d'une cible aléatoire : vous avez un objectif, par exemple payer quelque chose à la fin et vous pouvez négocier un certain nombre de titres suivant l'évolution du marché et vous allez utiliser cette stratégie pour vous approcher au mieux de la cible. Dans l'esprit et même dans les mathématiques qui sont derrière, cela n'est pas radicalement différent des problèmes que la NASA avait dans les années 60 pour envoyer la navette sur la lune : elle devait corriger le tir au fur à mesure, en fonction des informations qu'elle récupérait. L'évolution temporelle compte, l'information devient un paramètre extrêmement important et ce portefeuille dynamique devient la clef de la couverture du monde des options. Il faut donc s'adapter au jour le jour, utiliser le maximum d'informations, adapter sa stratégie pour essayer de s'approcher le mieux possible de la cible et réduire le risque final.

Vous allez faire payer un prix à votre contrat que vous allez investir dans cette stratégie. Comme je l'ai écrit, dans beaucoup de cas le prix n'est pas l'enjeu majeur, sauf pour des produits très tordus : la plupart du temps on peut le trouver dans le marché à partir de l'offre et de la demande. Le prix du contrat est aussi affiché tous les jours dans le marché, il aura aussi de l'information quotidienne supplémentaire, et vous allez pouvoir l'utiliser. Donc en fait on rajoute l'information du marché au jour le jour et on essaye d'utiliser cela pour conclure.



Certes, l'idée est intéressante mais après ? On sent bien la théorie, mais la question pratique du volume de dollars qui doivent être achetés au jour le jour est très concrète. Le modèle apparaît à la fin pour quantifier. Il n'est plus un objet en soi comme dans la prévision statistique ou dans la gestion de portefeuille, dans la prévision des gains, etc. Le modèle devient ce qui quantifie la stratégie entre deux dates de recalibration. Pour que cela fonctionne, on sent bien qu'il faut jouer la vision différentielle, il faut que les dates soient très rapprochées. Donc dans le marché des dérivés, un *trader* est tenu de regarder son exposition au risque tous les soirs. Cela c'est l'échelle de temps au maximum : cela peut être plusieurs fois par jour.

Les choses apparaissent comme sur ce schéma. La ligne qui est sur le plancher représente la simulation d'un cours. Evidemment, vous pouvez simuler jusqu'au bout, donc vous avez produit de l'information dont il reste à juger de la pertinence. Il y a une formule qui s'appelle la formule de Black et Sholes et qui vous dit combien vous devez acheter d'actions pour vous couvrir. La courbe du dessus, sur les graphes de gauche représente l'évolution du produit au cours du temps. La cible est la rémunération de l'option de vente (*put)* évoquée plus haut, c'est-à-dire que vous avez garanti que quelqu'un pourra vendre à un prix correct. Si la trajectoire arrive au-dessus du prix garanti, vous aurez à payer quelque chose puisque vous vendrez à perte à la personne qui est derrière. Si la trajectoire arrive en dessous, le client achète ou vend son *put* à son prix de marché et vous ne perdez rien.

Vous ne pouvez vous permettre de fonder votre commerce sur « ah, et bien le prix que j'ai garanti, j'ai une chance sur deux qu'il ne soit pas atteint, comme cela je serai très content ». La question n'est pas là. A droite apparaissent les montants que l'on doit investir dans l'actif risqué, pour réduire les risques à la fin. A gauche, c'est la valeur du portefeuille de couverture, qui est aussi le prix aux dates intermédiaires du produit qu'on a garanti. Comme on le voit sur les simulations, vous arrivez exactement au point d'impact. C'est le monde idéal : vous avez réussi à couvrir n'importe quoi ou à peu près.

Les simulations ont été faites avec un modèle donné et la couverture est déduite du modèle. Dans le marché, on ne connaît évidemment pas le modèle. La question est donc de savoir comment identifier le modèle sous-jacent, et de la remonter au réel. Si on retient bien ce que l'on a dit : il y a de l'information sur les prix, il y a de l'information sur le cours mais il ne s'agit pas tellement de prédire comment cela doit bouger, mais on est en train de prédire comment on doit se couvrir entre aujourd'hui et demain, puisque vous allez retrouver le prix demain. C'est ce que va faire le marché : il va identifier à partir des prix du marché des paramètres, gérer en fonction de ces paramètres qui sont les paramètres implicites, et puis il va mettre en place une stratégie de couverture jusqu'au lendemain et recommencer le surlendemain.

Donc, le message de Black et Sholes, ce n'est pas comment faire des prix, mais comment couvrir les risques générés par un produit financier, ce qui est radicalement différent des messages de gestion de portefeuille et de prévision. L'une des caractéristiques de ces produits, couverts grâce à la stratégie dynamique, est d'être très peu sensibles à la vraie tendance du marché, comme Bachelier l'avait montré en 1900. Par exemple, vous pouvez trouver des options de vente au début de l'automne 2009. La tendance générale est pourtant fortement à la baisse et celui qui les vend, en s'adaptant au marché, peut réduire considérablement l'effet de la tendance. En revanche, ce vendeur est exposé à l'ampleur des fluctuations. Finalement, le marché des dérivés, en dehors de la spéculation à l'état pur, c'est la gestion du risque de fluctuations, donc d'un risque qu'on pourrait appeler du deuxième ordre.

Ce qui m'a vraiment intéressée, c'est cette rupture conceptuelle dans la vision du risque et de l'estimation des risques futurs qu'introduisent Black, Scholes et Merton dans ce contexte. Les idées étaient nouvelles dans les marchés à cette époque. Un acteur des marchés n'aurait pu le faire, non parce qu'il n'avait pas la technicité, mais parce qu'il est trop impliqué dans la pratique du marché. Cette discontinuité apparaît à chaque grande percée technique ou à chaque nouveau concept introduit, toujours de l'extérieur et souvent par des scientifiques.

4. Conclusion

La mise en pratique de ces nouvelles idées a eu un impact important dans le monde des produits dérivés, elle a effectivement contribué à réduire le risque spécifique de chaque contrat. La crise financière permet d'en douter, même si les dérivés les plus problématiques comme les dérivés de crédit restent celles dont l'analyse des risques était la plus superficielle. Ce faisant, on a introduit de nouveaux risques, et notamment le risque du modèle qui est structurellement lié à ce type d'activité : *a priori* plusieurs modèles existent, qui satisfont les contraintes de calibration. En mathématiques, on dit qu'on a un problème inverse mal posé. Comme ces modèles engendrent différentes stratégies de couverture et différents prix, la pratique est de retenir le modèle le plus simple et de provisionner la différence de prix maximale.

Le problème de la prise de risque se pose aussi très rapidement, comme chaque fois que l'on parvient à neutraliser les risques. Il est tentant d'en prendre plus, mais ils sont alors plus difficiles à gérer, d'autant que le risque de deuxième ordre est en jeu. Dans les marchés, on se dit, par exemple, une fois que l'on a su couvrir le produit : « ah d'accord, notre risque résiduel c'est la volatilité… et si on faisait des produits sur la volatilité… ». Cela a conduit à une inflation de produits, souvent très complexes et dont l'intérêt financier est réduit. Un autre problème est induit par la gestion quotidienne et sous-jacente à ces marchés, qui permet de vendre des produits de longue maturité. L'horizon de chacun reste la journée, et en fait, effectivement, dans la salle, les gens sont assez insensibilisés à ce qui peut se passer pendant la nuit. Ce souci quotidien peut conduire à perdre de vue l'ensemble des risques futurs du produit, car on se projette peu à six mois, un an, cinq ans, dix ans, d'autant que les bonus eux aussi ramènent les enjeux à des horizons d'un an au maximum. Dans ce monde, les risques à très court terme ne sont pas si mal gérés que cela, on ne fait pas tout à fait n'importe quoi, mais l'agrégation globale des risques et les conséquences à moyen et à long terme sont peu mesurés dans les salles de marché. Les gens ont un objectif à atteindre tous les jours, ils le font, mais s'ils ne sont pas en train de se casser la figure en posant bien le pied pour descendre, ils ne sont pas obligés de voir que la pente est savonneuse et qu'elle est surtout très raide.

Puisque cela marche en gros, la tentation est de transférer beaucoup de risques aux marchés : la titrisation ou les *subprimes* en sont des exemples, mais ils échappent à l'analyse que je viens de développer, car leur principe de « risque » est de jouer la diversification par tête, et non intertemporelle. On fractionne les risques entre un grand nombre d'investisseurs, qui n'en supportent qu'une petite part, sauf si tout à coup les défauts se concentrent.

Ces produits deviennent des instruments de spéculation purs et, même couverts au jour le jour, ils ne sont pas à l'abri de grands mouvements. C'était le cas en particulier, à partir de 2003, de l'explosion de la gestion des dérivés de crédit dans laquelle l'activité commençait. Toute nouvelle activité porte en elle en général des marges assez importantes parce que l'information qui se paye n'est pas disponible en quelque sorte, et on a vu qu'elles ont dépassé tout ce que l'on pouvait imaginer.

Le discours des médias qui magnifiait les performances incroyables du système financier dans les années 2005, 2006, 2007, n'a jamais évoqué le fait qu'il devait anticiper le coût d'une crise qui devait se produire. Pendant les bulles spéculatives, celui qui gagne pense qu'il va toujours gagner, à tous les niveaux. Les probabilités lui montrent qu'au contraire, il lui faut devenir particulièrement vigilant.

5. Commentaires de Michel Armatte

Ma carrière de chercheur s'est déroulée dans une autre branche des sciences du hasard, même si j'ai eu mon DEA de statistique mathématique la même année que Nicole El Karoui (1968). Comme vous l'avez dit, un statisticien n'est pas un probabiliste et un probabiliste est un mathématicien bien particulier. Par conséquent, mes commentaires vont se situer un peu en décalage ou en surplomb. Comme statisticien, j'ai exercé un métier qui peut se résumer par le traitement de données nombreuses, soit de façon descriptive et multivariée avec les outils de l'Analyse des données, soit à l'aide des schèmes probabilistes, qui sont des processus dans le seul cas de données temporelles. Les recherches sur les sciences que je mène au centre Koyré offrent un deuxième point de vue, en particulier un travail sur les modèles et leur transformation dans la période d'après guerre, dans les domaines aussi variés que la macroéconomie, la finance, les transports et les études du changement climatique. C'est finalement du troisième point de vue, celui de l'historien des statistiques et des probabilités que mes commentaires sont rédigés.

Revenons à l'histoire des probabilités. A Paris, le séminaire d'histoire des statistiques et des probabilités, voit défiler un grand nombre de chercheurs qui ont fait des études variées sur les périodes les plus anciennes, par exemple du calcul des probabilités à ses débuts, avant même parfois les fameux échanges et correspondance entre Pascal et Fermat qui constituent l'origine mythologique d'une « géométrie du hasard » (l'expression est de Pascal) et qui explorent toutes les origines du probable. Comme vous n'êtes pas remonté aussi loin, je rappelle juste que l'on peut d'abord rattacher le probable à la question de l'opinion probable qui fut l'objet de nombreux débats théologiques, comme la controverse entre jésuites et jansénistes qui est au cœur des *Lettres provinciales* de Pascal. En appliquant cette vision à notre économie financière d'aujourd'hui on retrouverait la notion d'expertise, à l'opinion faisant autorité, et conduisant à des évaluations et des probabilités subjectives associées à la tradition de « la probabilité des témoignages et des jugements ». N'y a-t-il pas encore aujourd'hui dans les salles de marché des décisions qui se prennent sans calcul, sur la foi d'expertises autorisées de gens qui connaissent intimement les marchés ?

Une deuxième piste possible consiste à suivre l'émergence de l'espérance mathématique dans l'idée d'un juste prix, ou plus généralement des contrats aléatoires, qui se répandent au XVII^e^ aussi bien dans le commerce, dans le droit que dans les assurances. Notre séminaire fut fondé à l'EHESS par un mathématicien G-T. Guilbaud et un philosophe E. Coumet, auteur d'un très bel article intitulé « Le hasard est il né par hasard ? ». Tous deux ont beaucoup travaillé sur les contrats aléatoires. Le prix d'un actif financier est-il une forme de contrat aléatoire comme l'est le contrat assurantiel simple, auquel vous avez fait référence, pour lequel la prime d'assurance représente l'équivalent d'une loterie dont on cherche l'équivalent certain, et pour lequel on cherche aussi à réduire les risques par mutualisation ? Vous avez montré que cela est une interprétation valide pour certains produits financiers, mais ne l'est plus dans le cas des options. La logique n'y est plus la logique assurantielle de réduction des risques par mutualisation, mais dans celle de non-arbitrage par un portefeuille dit de couverture, « équivalent » à chaque moment à la loterie intertemporelle de l'option, qui suit la cible mobile de sa valeur fondamentale, permettant à la banque d'équilibrer sa gestion sur chaque option et non pas globalement par compensation. Il est intéressant que vous puissiez nous confirmer cette différence essentielle.

Une troisième signification du probable trouve son origine dans les sciences d'observation et dans la théorie des erreurs. C'est une source énorme de théorisation, de construction du probable : on s'aperçoit que l'erreur pourrait être modélisée par la notion de variable aléatoire, assez lentement d'ailleurs parce que ce n'est pas évident d'identifier erreur et hasard. Il faut faire le tri entre erreur systématique et erreur accidentelle, ce qui reste quand on a tout expliqué. Et là, les multiples causes qui peuvent jouer fabriquent la merveilleuse

« loi du hasard », la loi de Moivre, de Laplace et de Gauss. Celle qui justifie le plus facilement l'emploi des moyennes et des moindres carrés pour extraire des observations la « vraie » valeur. Que cette loi « normale » soit aussi celle des valeurs boursières est une affaire qui fait controverse aujourd'hui puisque l'on redéploie la critique de Mandelbrot des années 1960 qui contestent que les prix des actifs suivent des lois normales et des processus browniens.

Tout cet arrière-plan historique, les probabilistes et les financiers s'en fichent un peu. Ils n'ont qu'une envie c'est de s'en détourner. Pour eux, c'est une préhistoire de la probabilité dans laquelle celle-ci n'est pas définie proprement. Le fondement de la probabilité chez Huyghens et Laplace par exemple, à partir du rapport des cas favorables sur les cas possibles, est totalement circulaire puisqu'il a comme condition que ces cas sont équiprobables. C'est la même circularité qui se retrouve dans la loi des grands nombres de Bernoulli, où il y a deux fois le mot « probabilité » et donc on ne voit pas comment cela peut servir à définir une probabilité. La coupure de ces fondements instables intervient bien avec Kolmogorov, la théorie de la mesure et la notion de borélien et surtout une définition axiomatique qui évacue les questions de signification et d'usage.

Dès lors, ma question n'est pas comment on peut fonder correctement, axiomatiquement, la mesure de probabilités, mais qu'est-ce qu'on évacue quand on le fait, qu'est-ce qui reste d'intéressant de ces débats sur les interprétations du probable ? En tant que probabiliste « qui ne s'occupe pas des applications » ni sans doute des interprétations, vous proposez peu de réponses dans votre exposé, parce que comme théoricienne, vous ne vous souciez que des propriétés formelles de vos objets, des processus stochastiques définis de telle ou telle façon, et pas de leur sémantique ni de leur pragmatique. Néanmoins, vous avez sans doute une idée sur ces choses, ne serait-ce que pour les enseigner ou pour les appliquer ensuite à la finance, ce qui a constitué la seconde partie de votre carrière. Dans le domaine qui est le vôtre aujourd'hui, que signifie « interpréter une probabilité » ? Quelle est la nature du hasard qui est derrière une probabilité ? Est-elle épistémique, c'est-à-dire liée comme le pensait Laplace à notre méconnaissance des causes ? Est-elle ontique, c'est-à-dire intrinsèque aux phénomènes physiques, biologiques ou économiques comme le pensèrent Maxwell et Darwin en 1859 ? N'est-elle ni l'un ni l'autre ? Est-elle une propriété logique comme le voulait Keynes? La probabilité elle-même qui est la mesure du risque est-elle objective comme le voyait Cournot ? Est-elle subjective ? Ou bien est-ce que l'on se moque vraiment de ce débat sur le type de hasard invoqué, parce que ce qui importe c'est de pouvoir calculer avec des modèles, opérationnels, opératoires, voire performatifs comme disent certains ? Finalement, quelle que soit la nature du hasard, le principal serait de le dominer.

2. Ma deuxième observation porte sur « l'autonomisation des probabilités ». Quand on s'autonomise, c'est qu'on se sépare de quelque tutelle. De laquelle exactement, des mathématiques ? Comme vous l'avez bien expliqué, il est vrai que le calcul des probabilités fut longtemps une branche des mathématiques mal vue des mathématiciens du XIX^{e} siècle et encore de la première moitié du XX^{e}. Ce calcul n'avait pas des fondements très solides et, surtout, il était l'objet d'applications jugées abusives : la confiance que l'on pouvait donner à des jugements ou à des témoignages, par exemple. Dans les années 1950-1960, qui furent celles de notre jeunesse, ce rejet fut amplifié, vous avez raison de dire que l'environnement bourbakiste n'y fut pas indifférent. Des travaux d'historiens l'attestent aujourd'hui. On peut en trouver des traces dans le Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique[13] : les bourbakistes ont retardé le développement des probabilités. On peut alors parler d'une autonomisation du calcul des probabilités en tant que tel, par rapport à l'analyse mathématique, qui par exemple l'hébergeait dans la plupart des classifications bibliographiques.

Cette autonomisation du calcul des probabilités pourrait être aussi, dans votre expression, une autonomisation par rapport aux champs d'application qui se sont longtemps confondus avec cette spécialité. Vous avez tendance à définir ce domaine comme un domaine de science pure ayant sa propre logique de développement, mais qu'on peut aussi appliquer à certains domaines, comme vous l'avez fait avec la finance dans une deuxième partie de votre carrière. Ce domaine des processus stochastiques a néanmoins son autonomie propre, et en particulier il y aurait peu d'effets de retour de ses applications sur ce champ des mathématiques pures. Selon vous, il n'y a pas de possibilité, pour quelqu'un qui est en salle des marchés, d'inventer ce que les mathématiciens inventent. Je nuance votre propos, dans la mesure où les notions de science pure et d'application me semblent incorrectes pour ceux qui observent ce qui se passe dans la finance de marché. Des mathématiciens affirment qu'une grosse partie des mathématiques est motivée par un problème réel, pris dans un domaine extérieur aux mathématiques. Les études sur la science, les *sciences studies* que l'on pratique dans mon laboratoire disent que la science universitaire du XX^{e} siècle n'est pas isolable des opérations industrielles ou gestionnaires qu'elle favorise. Il n'y a plus aujourd'hui que des technosciences qui sont des ingénieries. La finance est typiquement une branche de l'activité économique devenue une industrie intégrant tout autant de mathématiques que le calcul d'un pont. Pensez-vous que l'autonomisation des mathématiques des processus est encore réelle par rapport aux champs d'application comme la finance ? Ce champ des processus stochastiques continus, est-il vraiment indépendant des progrès de la finance et du rôle de celle-ci dans le régime économique que l'on connaît depuis les années 1990 ? Est-ce qu'on ne pourrait pas dire au contraire que ce champ a profité de l'innovation financière, qu'il lui doit ses problèmes, ses solutions et ses outils logiciels ?

Enfin, cette autonomie pourrait être professionnelle et revendiquée à l'inverse par les financiers. Certains d'entre eux ont en petit nombre réclamé la possibilité de pouvoir se passer des mathématiciens pour faire leur métier. D'autres spécialistes de la finance de marché, plus nombreux, ont revendiqué une totale autonomie par rapport à la science économique, dont ils ne veulent plus être une branche. Selon Nicolas Bouleau la finance était d'abord une branche de la théorie économique, mais la fécondité extraordinaire des innovations mathématiques (et tout particulièrement de l'intégrale d'Itô) ont fait émerger une ingénierie nouvelle, développée par les banquiers et les mathématiciens, totalement indépendante de l'économie, jusqu'au moment où les pseudos prix de la banque de Suède (« Nobel d'économie ») ont permis de réintégrer ces innovations[14]. Dans les universités, les cursus de finance se sont parfois émancipés à la fois des mathématiques et de l'économie pour être des filières de gestion ou des cursus autonomes. Aujourd'hui, on retrouve cette revendication d'autonomie du système financier dans la distinction forte faite souvent entre crise financière et crise économique. C'est ma deuxième question : que pensez-vous de ces rapports complexes entre mathématique des processus, économie et finance ? Quelle autonomisation du calcul stochastique avez-vous en tête ?

3. Ma troisième série de remarques concerne la question du rapport entre la mathématique des processus continus et la réalité des marchés d'aujourd'hui. Dans quelle mesure les modèles reflètent-ils bien la réalité de ces marchés ? Cette réalité n'existe-t-elle pas indépendamment des modèles, parce que c'est eux qui créent en grande partie le comportement des modèles, entre réalisme et constructivisme ? Plus concrètement, je fais référence à l'effet Pygmalion et à la propriété de prophétie autoréalisatrice de la plupart des modèles en économie et en finance. Tout le monde croit que le vrai prix est celui donné par le modèle et agit d'une façon à ce que le monde réel soit conforme au modèle. Les transactions sur les marchés d'options dépendent des décisions des acteurs mais celles-ci se font avec l'aide de modèles de gestion et de décision qui sont les mêmes. Les modèles de gestion de portefeuille, et plus encore les modèles de prix des options ne sont pas simplement des modèles qui donnent une représentation du marché. Ils sont normatifs et performatifs. Ils indiquent ce qu'il faut faire sur ce marché et construisent cette réalité du marché. Sont-ils alors encore contrôlables ? C'est une question qui effraie le citoyen, en droit de penser qu'on

entre dans un monde où il n'y a plus d'intervention humaine. Et parce que cela permet de trouver enfin le coupable des dérapages de la finance : c'est de la faute aux modèles si on entre dans des crises comme celles de 87 et de 98, et celle de la titrisation que l'on connaît aujourd'hui. Vous avez écrit une chose un peu inquiétante: le contrôle, au quotidien, de ce qui se passe est impossible dans une vision plus longue, plus macro, car on est un peu dans le cirage. Il y a donc une sorte de paradoxe inquiétant : on construit des modèles pour apprivoiser le hasard (le *Taming of chance* de l'ouvrage d'Ian Hacking[15], voire « l'abolition du hasard » de Nicolas Bouleau pour la gestion révolutionnaire des options), mais on crée une inflation des risques. D'une certaine façon, on se donne la possibilité que des risques faibles deviennent géants une fois leur effet-domino à l'œuvre dans le système global. Comme en plus on s'est trompé sur les « vraies » lois du hasard, cela fait très peur d'être dans des situations de queues bien plus épaisses. Concevez-vous de cette manière les modèles comme les producteurs du marché mais aussi comme des modèles de risque majeur ? N'y a-t-il pas plus largement un problème de transparence insuffisante des pratiques financières qui font que l'on voit dans l'alliance des mathématiciens et des banquiers un jeu de dupes ? Nicolas Bouleau parle de connaissance de domaine publique pour les mathématiques, mais de privatisation des savoirs professionnels, aux enjeux considérables des opérateurs et des *traders*.

4. Mon quatrième point s'articule autour des modèles et de la simulation. Dans la simulation de systèmes complexes, « complexe » peut signifier tout simplement, comme pour les mathématiciens, un système qui n'est pas linéaire ; soit, plus simplement, un système comme le système terre ou le système climat, dans lequel il y a beaucoup d'acteurs, humains et non humains, dans lequel se mélangent des phénomènes d'échelles très différentes, qui ont des physiques différentes et donc des théories différentes. Le modèle sur ordinateur n'est plus le reflet d'une théorie unique, mais un objet qui intègre et relie tous ces petits bouts de savoir hétérogènes. Dans les laboratoires, les gens travaillent sur ces modèles globaux qui unifient ces connaissances de statut épistémologique très divers, parce qu'il n'y a pas moyen de faire autrement pour ces systèmes complexes. Le modèle dans ces domaines est utilisé en simulation, pour l'expertise et la décision collective, par exemple sur les politiques à suivre pour stabiliser le système de l'économie mondiale ou celui du climat. Ce n'est pas le statut des modèles probabilistes de la finance que vous avez présentés. On est encore dans le paradigme d'un modèle financier bien adossé à une théorie mathématique précise du processus. En second lieu, vos modèles servent moins à la simulation de futurs inconnus qui seront notre

environnement commun, que pour le calcul des prix et des risques au temps t, donc dans une aide plus directe à la décision individuelle. Vos modèles ne servent pas à la décision politique collective de réglementer les marchés. Ils guident l'investisseur et le spéculateur. D'où mes deux questions sur l'histoire de la simulation : premièrement, est-ce que le système financier a une quelconque complexité, dans les deux sens du terme que j'ai indiqués, ou l'est-il finalement moins que les systèmes géophysiques et humains que l'on étudie comme le climat, dans lequel il y a l'atmosphère mais aussi les océans, la faune, la flore… ? Par ailleurs, vous dîtes que « dans les banques, ça tourne sans interruption, en simulation les dimanches comme la nuit, et le reste du temps ça tourne en direct, en cotation, en déclenchant des achats et des ventes ; alors que dans les laboratoires les chercheurs sont réservés, ils ont un peu peur de se laisser embarquer par cette nouvelle dimension de la recherche qui est la simulation ». Nous observons la même chose dans les recherches sur le climat, où certains chercheurs rechignent à caler leur activité sur la simulation. Ils sont très attachés aux processus physiques fondamentaux. Ils veulent par exemple étudier le rôle des nuages d'un point de vue physique, chimique … et ils trouvent que la simulation prend trop de leur temps aux dépens de la recherche fondamentale. Comment voyez-vous cela ? Dans les laboratoires de probabilités la simulation continue-t-elle de susciter des réticences ?

6. Réponses de Nicole El Karoui

L'objectif de l'émancipation probabiliste n'était pas de se séparer des mathématiques, mais de permettre à son outil de donner par lui-même les réponses les plus adéquates, sans passer par des intermédiaires à chaque fois très limitatifs. La puissance de la théorie des martingales a en grande partie permis cela, et par conséquent, elle a permis l'application de la réflexion probabiliste et de la modélisation à des tas de champs divers. En fait, cette émancipation est un moment singulier, qui a entraîné d'autres allers-retours. Je ne veux pas parler d'applications car ces processus en temps continu ont pour origine le mouvement brownien d'Einstein, l'observation en général. Selon les périodes, les problèmes se révèlent vraiment compliqués et les outils conceptuels pour les résoudre manquent. Une fois qu'un premier pas est fait, on explore de nouveaux champs et, de la même façon, il y a de nouveaux problèmes pour lesquels les outils ne sont pas adéquats. Des périodes plus théoriques précèdent ou suivent ainsi des périodes plus appliquées. J'ai plutôt participé à une période très théorique, nécessaire, et dont les retombées, même en termes de champ d'application, ont été diversifiées. Effectivement, les sujets de réflexion en termes d'application, par exemple au laboratoire de probabilités, se sont diversifiés.

Cela arrive assez fréquemment en mathématiques qu'il y ait une période où, en interne, la théorie voit naître des outils plus efficaces que ceux qu'elle peut récupérer de l'extérieur. Le danger, comme on l'a vu, c'est qu'elle arrive à une sorte de point maximal de ce qui est acceptable par les jeunes, l'environnement, etc. Souvent, on laisse de côté un certain nombre de choses et l'on repart dans d'autres directions. Dans le cas des marchés financiers, ce qui est pour moi extraordinaire, c'est que les travaux de Black, Sholes, Merton et le champ d'application comme la manière d'utiliser le temps plutôt que la différenciation par tête, n'auraient été possibles si tous ces concepts et ce raisonnement du calcul différentiel stochastique, qui, d'une certaine manière, n'est pas du tout normal du point de vue mathématique, n'avaient pas existé auparavant. A un moment, on se sert de concepts anciens (enfin ils datent des années 1940, 1950, 1960, donc pas si vieux s'ils sont utilisés en 1973), parce que l'environnement le permet. Cette question concerne aussi nos financeurs qui pensent qu'on doit donner des directions, quand on doit faire des mathématiques ou quand on doit financer la recherche appliquée. Personne ne pouvait imaginer que le calcul stochastique d'Itô serait le moteur de la gestion des risques trente ans plus tard dans les marchés financiers. L'existence de ces outils a permis bien des choses. Je crois beaucoup à l'aller et retour, en cela c'était une expérience singulière.

Dans l'activité probabiliste, celle des produits dérivés est math-dépendante. C'est la seule que je connais, qui n'existerait pas s'il n'y avait pas cet accompagnement quantitatif, je dis « les mathématiques », mais c'est exagéré parce que c'est structurel. Cela est assez rare, parce qu'on n'est pas dans la prévision ni dans la gestion où un bon outil aide à mieux faire. Là, il n'y a pas d'activité s'il n'y a pas de couverture. C'est d'ailleurs devenu réglementaire. En arrière-plan des débats autour de la définition, de l'usage, et de l'interprétation des probabilités, se trouvent les questions qui traitent du hasard et en particulier du sens de la probabilité nulle. Ces questions m'ont toujours fascinée : quand a-t-on osé nommer le zéro, comment a-t-on fait pour l'aborder ? Le moment de l'extraction de la réalité « zéro » appartient aux grandes percées de la discipline. Il ne s'agit pas tant des grandes découvertes que de la mise en mot, dans une phrase qui n'est pas magique, mais que personne n'arrivait à prononcer. On nomme parce que ça s'impose dans la pensée. La théorie des processus est très liée à l'expérimentation dans les sciences physiques. Pour répondre à la troisième question de Michel, il faut je pense qu'un même formalisme permet de rendre compte théoriquement de tous ces aspects. C'est la manière dont on le met en œuvre qui va révéler le point de vue qu'on anticipe.

Dans les marchés de dérivés, on essaie de s'affranchir de la probabilité, avec une gestion infinitésimale (enfin il ne faut pas exagérer, c'est à la journée). On essaie toutefois de donner le rôle minimum à l'identification du modèle, puisque ce modèle vous le choisissez un jour et le corrigez le lendemain. La vision est adaptative, c'est celle d'une correction permanente.

Le modèle en soi n'a donc plus un rôle extrêmement fondamental. Du coup, la question de la définition du modèle est secondaire. Je suis un peu provocatrice parce que ce n'est pas tout à fait cela. La question qui pour moi n'est pas secondaire, et on revient à un débat beaucoup plus fondamental, sur lequel je ne sais pas répondre, c'est cette question des ensembles négligeables, ou de très petite probabilité. Dans l'activité des marchés de dérivés (c'est la seule que je connais bien), il y a des scénarios, notamment de *stress* et de tout ce que l'on veut. La compréhension de ce qu'on laisse de côté n'est pas toujours claire. Je me dis finalement qu'un modèle probabiliste dans cet univers est d'abord un ensemble, une famille d'événements, que l'on décide comme impossibles ; c'est une sorte de consensus. Si on revient à ce que j'ai présenté et qu'on en écrit les équations, le problème devient complètement algébrique. Il n'y a donc pas besoin de probabilité, elle intervient *a posteriori* pour le calcul. Ce qui doit être défini c'est « qu'est-ce qui est impossible ? ». Et dans la complexité de ce que l'on voit, cela n'est pas du tout une trivialité. De même, au niveau des méthodes de simulations, vous avez à chaque fois une perception de ce que vous êtes prêts à considérer ou à accepter comme impossible. Alors, on revient au fondement de toutes les questions de l'utilisation des probabilités, où la probabilité sert à définir des ensembles négligeables, qui la définissent elle-même. Cette question-là n'est pas du tout claire pour moi.

En ce qui concerne les simulations, j'évoquais juste le haut lieu de la théorie probabiliste qui est le laboratoire de probabilités, dans lequel on s'intéresse malgré tout aux probabilités numériques. C'est vraiment un secteur en pleine explosion, sur lequel il faut avoir une réflexion permanente pour savoir ce que signifie « simuler ». Cela crée des problèmes théoriques complexes et l'éclairage des modèles ou de la pratique donne des moyens d'encadrer certaines quantités. Ce qu'on laisse de côté, quelle analyse peut-on en avoir ? Est-ce qu'on peut en partie le mesurer ? Il est en tout cas très important d'être vigilant, parce qu'on peut vite faire n'importe quoi : les phénomènes rares peuvent avoir un impact très important.

Les scientifiques continuent à réfléchir intensément sur le problème des grandes données, de leur simulation, de leurs asymptotiques et de leurs conséquences en termes de risques. Théorie et pratique sont pour moi complémentaires dans la compréhension de l'ampleur de ce qu'on ne sait pas analyser ou de la croyance qu'on peut avoir.

Notes

[1] Shafer, G. [2007], « Du principe de Cournot au marché efficient », *in* Jean-Philippe Touffut, *La société du probable: Les mathématiques sociales après Augustin Cournot*, Paris : Albin Michel, pp. 83-132.
[2] Meyer, P.-A. [1967], *Intégrales stochastiques 1*, « *Séminaire de probabilités de Strasbourg »*.
[3] Heams, T. [2008], *Vers une théorie probabiliste du vivant*, Prisme N° 12, septembre, Paris : Centre Cournot pour la Recherche en Économie.
[4] Brown, R. [1828], « A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies », *Phil. Mag.* **4**, pp. 161-173.
[5] Wiener, N. [1923], « Differentiable Space », *Journal of Mathematics and Physics*, **2** (131).
[6] Kolmogorov, A. [1933], *Grundbegriffe der Wahrscheinlichtkeitsrechnung*, Springer.
[7] Loève, M. [1973], « Paul Lévy, 1886-1971 » in *The Annals of Probability*, vol. 1, n° 1.
[8] Dans la théorie économique, cela correspond à la situation où les prix ou les structures sont « efficients ».
[9] Doob, J. L. [1996], « The development of rigor in mathematical probability (1900-1950) », *Amer. Math. Monthly* **103** (7) , pp. 586-595.
[10] Shafer, G., *ibidem*.
[11] Itô, K. 伊藤 清[1998], *My Sixty Years in Studies of Probability Theory : Acceptance Speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences*.
[12] Dellacherie, C. [1969], « Ensembles aléatoires I », *Sém. Proba. Strasbourg III*, LNM n°88, pp. 97-114, Springer, Berlin.
[13] Voir http://www.emis.de/journals/JEHPS/index-3.html.
[14] Bouleau, N [1998], *Martingales et marchés financiers*, O. Jacob.
[15] Hacking, I. [1990], *Taming of Chance*, Cambridge University Press.